INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE GEOLOGIE APPLIQUEE & DE PROSPECTION MINIERE

Concours de 1979

Composition de MATHEMATIQUES

Les candidats sont invités à soigner l'écriture, la présentation et la rédaction.

On étudie les applications u de l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui satisfont à la relation (A) : "Pour tout couple (x, y) de réels, $u(x+y) + u(x-y) = 2\,u(x)\,u(y)$".

E est l'ensemble des applications non constantes sur $\mathbb{R}$, qui satisfont à (A). $\mathscr{C}$ est le sous-ensemble de E dont les éléments sont des applications continues sur $\mathbb{R}$.

- I -

1° a) Montrer qu'il existe deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, f paire, g impaire, telles que, pour tout x réel, $f(x) + g(x) = e^x$. Calculer $[f(x)]^2 - [g(x)]^2$. Montrer que f est élément de $\mathscr{C}$. g vérifie-t-elle (A) ? x et y désignant deux réels quelconques, exprimer le produit $g(x+y)\,g(x-y)$ à l'aide de $g(x)$ et de $g(y)$.

b) Etudier le sens de variation et la représentation graphique (Γ) de f relativement à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Montrer que f admet un développement en série entière et préciser le rayon de convergence.

Prouver que la restriction de f à l'ensemble $\mathbb{R}_+$ des réels positifs ou nuls définit une bijection de $\mathbb{R}_+$ vers $[1, +\infty[$. On désignera par f_1 l'application réciproque.

2° Déterminer les coordonnées du centre de courbure P en un point M d'abscisse t sur (Γ). La droite $(M P)$ rencontre l'axe $(O, \vec{i})$ en N. Préciser les positions relatives des points M, N et P.

3° On suppose que φ_1 est un élément de $\mathscr{C}$ appliquant $\mathbb{R}$ dans $[1, +\infty[$. f_1 désignant l'application définie au I,1°b, on pose $h = f_1 \circ \varphi_1$.

a) Calculer $\varphi_1(o)$ et préciser la parité des applications φ_1

$f\left(h(x+y)\right) + f\left(h(x-y)\right) = f\left(h(x) + h(y)\right) + f\left(h(x) - h(y)\right)$.

c) Démontrer que, si λ et x sont des réels positifs, $h(\lambda x) = \lambda\, h(x)$; (on pourra successivement étudier les cas où, x étant fixé, λ est entier, puis rationnel et enfin réel).

d) En déduire l'existence d'une famille d'éléments de $\mathscr{C}$ qu'on pourra exprimer à l'aide du paramètre $a = h(1)$.

- II -

Soit φ un élément de E.

1° a) Prouver que, pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe un polynôme unique P_n, à coefficients réels, à une indéterminée, et tel que, pour tout φ appartenant à E et pour tout x réel, on ait : $P_n\left(\varphi(x)\right) = \varphi\left(n\,x\right)$. Montrer que P_n vérifie une relation de récurrence qu'on précisera et que $P_n(\cos x) = \cos n\,x$.
Expliciter P_2, P_3, P_4 et P_5.

b) Montrer que, si n et p sont deux entiers naturels non nuls, l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{+1} \frac{P_n(x)\;P_p(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$, existe et la calculer, suivant les valeurs du couple (n, p).

2° On suppose ici qu'il existe un réel $T > 0$ tel que $\varphi(T) = 1$ et que, pour $0 < x < T$, $\varphi(x) \neq 1$. Calculer $\varphi\left(\frac{T}{2}\right)$ et $\varphi\left(\frac{T}{4}\right)$.
Pour tout x réel, exprimer $\varphi\left(x + \frac{T}{2}\right)$ en fonction de $\varphi(x)$. Montrer que, dans ce cas, φ est périodique.

3° On suppose maintenant qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que, pour $0 < x < \alpha$, on ait $\varphi(x) > 1$

a) Montrer que la suite de terme général $v_n = \varphi(2^n \alpha)$ satisfait à la relation $v_{n+1} = 2\,v_n^2 - 1$ et que $v_o > 1$. En déduire le comportement de v_n lorsque n augmente infiniment.

b) Prouver que $\varphi(x) > 1$ pour tout x réel. Avec l'hypothèse de cette question, φ peut-elle être périodique ?

.../...

4° a) Montrer que φ satisfait à la relation (B) :

" Pour tout couple de réels (x, y) :

$$\left(\varphi(x) - \varphi(y)\right)^2 = 4\left[\left(\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right)\right)^2 - 1\right]\left[\left(\varphi\left(\frac{x-y}{2}\right)\right)^2 - 1\right] "$$

(B) est-elle équivalente à (A) ?

b) Prouver que φ est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elle est continue en 0.

- III -

Φ désigne un élément de $\mathscr{E}$.

1° a) $\mathscr{E}$ est-il un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$?

b) Montrer que, quel que soit le couple (x, y) de réels on a :

$$2\,\Phi(y)\int_0^x \Phi(t)\,dt = \int_0^{x+y} \Phi(t)\,dt + \int_0^{x-y} \Phi(t)\,dt .$$

2° Démontrer que Φ est dérivable à tout ordre sur $\mathbb{R}$.

3° Montrer qu'il existe un réel k tel que, pour tout x réel, $\Phi''(x) = k\,\Phi(x)$.

4° En déduire que $\mathscr{E}$ est la réunion de 2 familles d'applications dépendant chacune d'un paramètre (les résultats seront exprimés à l'aide des fonctions usuelles).

- IV -

Φ désigne toujours un élément de $\mathscr{E}$.

Soient trois réels x_1 , x_2 et x tels que : $0 < x_1 < x < x_2$

1° Montrer qu'on peut définir une suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'entiers naturels tels que

$y_n = x_1 + \frac{\alpha_n}{2^n}(x_2 - x_1)$; $z_n = y_n + \frac{1}{2^n}(x_2 - x_1)$ et $y_n < x < z_n$.

Préciser la position de y_{n+1} et z_{n+1} par rapport à y_n , z_n et $\frac{1}{2}(y_n + z_n)$.

Que peut-on dire de la suite des segments $\left[y_n , z_n\right]$?

2° On suppose en outre que $0 < \Phi(t) < 1$ pour $0 < t < x_2$.

Montrer que : $\Phi\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > \frac{1}{2}\left(\Phi(x_1) + \Phi(x_2)\right)$

$$\Phi(y_n) > \left(1 - \frac{\alpha_n}{2^n}\right)\Phi(x_1) + \frac{\alpha_n}{2^n}\,\Phi(x_2)$$

$$\Phi(z_n) > \left(1 - \frac{1+\alpha_n}{2^n}\right)\Phi(x_1) + \frac{1+\alpha_n}{2^n}\,\Phi(x_2)$$

En déduire, pour tout λ réel appartenant à $[0,1]$:

$$\Phi\left(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right) > \lambda\,\Phi(x_1) + (1-\lambda)\,\Phi(x_2)$$

3° Dans le cas où $\Phi(t) > 1$ pour $0 < t < x_2$, peut-on obtenir des conclusions analogues à celles du IV 2° ?

4° X est une variable aléatoire finie prenant n valeurs réelles $a_i > 0$ ($1 \leq i \leq n$). On pose $p_i = P(X = a_i)$ (p_i est la probabilité de l'évènement $(X = a_i)$).
m est le moment d'ordre 1 de X. f désigne l'application définie au I,1°a.

a) Etudier la loi de la variable aléatoire $f(X)$.

b) En appliquant à f les conclusions du IV 3° , comparer le moment d'ordre 1 de $f(X)$ à $f(m)$.

N.B. - Les parties II, III, IV sont deux à deux indépendantes.

---

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail